

# Nilai Total Ketakteraturan Dari Graf Helm Dan Graf Dream Catcher

Grita Tumpi Nagari<sup>1</sup>, Rifqi Alhanif<sup>2</sup>, M. Salman A.N<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institut Teknologi dan Sains Nahdlatul Ulama Lampung Lampung

<sup>2,3</sup>Institut Teknologi Bandung

 [gritatumpinagari@gmail.com](mailto:gritatumpinagari@gmail.com)

## Abstract

Pelabelan total takteratur total dari suatu graf merupakan pelabelan total takteratur sisi dan juga pelabelan total takteratur titik. Pelabelan- $k$  total takteratur titik pada graf  $G$  sebagai pelabelan total pada  $G$ ,  $\eta: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , sedemikian hingga bobot semua titiknya berbeda, yakni  $wt_\eta(x) \neq wt_\eta(y)$  untuk semua  $x, y \in V(G)$ , dan juga untuk sebarang dua sisi di  $G$ ,  $wt_\eta(xy) \neq wt_\eta(uv)$  untuk semua  $u, v, x, y \in V(G)$ . Nilai minimum  $k$  sedemikian sehingga graf  $G$  memiliki pelabelan- $k$  total takteratur total disebut nilai ketakteraturan total dari  $G$ , dinotasikan dengan  $ts(G)$ . Pada penelitian ini, kami menentukan nilai eksak dari pelabelan total takteratur total dari graf helm ( $H_n$ ) dan graf *dream catcher* ( $Dc(3, n)$ ), yakni berturut-turut

$$ts(H_n) = n + 1 \text{ untuk } n \geq 3; \text{ dan } ts(Dc(3, n)) = \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil \text{ untuk setiap } n.$$

*Kata Kunci: pelabelan total tak teratur sisi, pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur total, Graf Helm, dan Graf Dream Catcher.*

---

## 1. Pendahuluan

Misalkan  $G = (V, E)$  adalah graf sederhana dan tak berarah dengan himpunan titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$ . Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan yang memetakan himpunan elemen di graf tersebut ke himpunan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat tak negatif atau positif). Domain dari pemetaan tersebut biasanya himpunan titik (disebut pelabelan titik), himpunan sisi (disebut pelabelan sisi), atau himpunan sisi dan himpunan titik (disebut pelabelan total). Namun tidak menutup kemungkinan terdapat domain lain selain ketiga domain tersebut. Kumpulan hasil penelitian terkait pelabelan secara lengkap dapat dilihat pada [3].

Dalam beberapa kasus, bobot dari suatu elemen di graf, yaitu jumlah semua label yang berse-suaian dengan elemen tersebut, menjadi perhatian para meneliti. Pada

studi pelabelan total ajaib, yang dapat dilihat secara lengkap pada [9], bobot suatu titik  $x$  terhadap pelabelan total  $\eta: E(G) \cup V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$  pada elemen-elemen di  $G = (V, E)$  didefinisikan sebagai  $wt(x) = \eta(x) + \sum_{xy \in E} \eta(xy)$ , dan bobot sisi  $xy$  adalah  $\eta(x) + \eta(xy) + \eta(y)$ . Biasanya bobot suatu elemen dinotasikan dengan memberi indeks, seperti  $wt_\eta$ . Hal ini untuk menunjukkan bobot suatu elemen terhadap pelabelan tertentu, dalam hal ini pada  $\eta$ .

Chartrand dkk.[2] memperkenalkan pemetaan  $\eta: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$  sebagai pelabelan- $k$  sisi pada graf  $G$  berorde paling tidak 3 sedemikian hingga bobot semua titiknya berbeda,  $wt_\eta(x) \neq wt_\eta(y)$  untuk semua  $x, y \in V(G)$  dengan  $x \neq y$ . Pelabelan demikian disebut dengan pelabelan takteratur. Nilai ketakteraturan dari graf  $G$  adalah minimum  $k$  sedemikian sehingga graf  $G$  memiliki pelabelan takteratur dengan label paling banyak  $k$ , dinotasikan oleh  $s(G)$ . Apabila bobotnya tidak ada, maka  $s(G) = \infty$ .

Berdasarkan pelabelan takteratur tersebut, Bača dkk [1] mendefinisikan pelabelan- $k$  total takteratur titik pada graf  $G$  sebagai pelabelan total pada  $G$ ,  $\eta: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ , sedemikian hingga bobot semua titiknya berbeda, yakni  $wt_\eta(x) \neq wt_\eta(y)$  untuk semua  $x, y \in V(G)$ . Nilai total ketakteraturan titik dari graf  $G$ , dinotasikan  $tv_s(G)$ , adalah minimum  $k$  sedemikian sehingga  $G$  memiliki pelabelan- $k$  total takteratur titik. Pada [1] telah ditentukan beberapa batas (baik batas atas maupun batas bawah) dan nilai eksak  $tv_s(G)$  untuk beberapa jenis graf, diantaranya graf pohon, graf lengkap, graf prisma, dan graf bintang. Selain itu, Bača membuktikan nilai total ketakteraturan titik untuk setiap graf- $(p, q)$   $G$  dengan derajat minimum  $\delta(G)$  dan derajat maksimum  $\Delta(G)$  sebagai berikut.

**Teorema 1.1.** Untuk sebarang graf  $G$  berlaku

$$\left\lceil \frac{p + \delta(G)}{\Delta(G) + 1} \right\rceil \leq tv_s(G) \leq p + \Delta(G) - 2\delta(G) + 1$$

dengan  $\Delta(G)$  adalah derajat maksimum dan  $\delta(G)$  adalah derajat minimum. ■

Selanjutnya, Nurdin dkk [5] membuktikan batas atas yang lebih ketat dari nilai total ketakteraturan titik sembarang graf sebagai berikut.

**Teorema 1.2.**

$$tv_s(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{\delta(G) + n_{\delta(G)}}{\delta(G) + 1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\delta(G) + n_{\delta(G)} + n_{\delta(G)+1}}{\delta(G) + 2} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{\delta(G) + \sum_{i=\delta(G)}^{\Delta(G)} n_i}{\Delta(G) + 1} \right\rceil \right\}. \blacksquare$$

Selain itu, Bača dkk. [1] juga mendefinisikan pelabelan- $k$  total pada graf  $G$  sebagai pelabelan total takteratur sisi pada  $G$  apabila setiap dua sisi berbeda pada  $G$  memiliki bobot yang berbeda, yaitu  $wt_\eta(xy) \neq wt_\eta(uv)$  untuk semua  $u, v, x, y \in V(G)$ . Nilai total ketakteraturan sisi dari graf  $G$ , dinotasikan  $tes(G)$ , adalah minimum  $k$  sedemikian hingga  $G$  memiliki pelabelan- $k$  total takteratur sisi. Bača [1] membuktikan nilai total ketakteraturan sisi suatu graf sebagai berikut.

**Teorema 1.3.**

$$tes(G) \geq maks \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rceil \right\}. \blacksquare$$

Bača juga menentukan nilai total ketakteraturan sisi dari lintasan, siklus, graf bintang, graf roda, dan graf persahabatan.

Selain pelabelan total takteratur titik dan pelabelan total takteratur sisi, juga terdapat pelabelan total takteratur total. Pelabelan ini pertama kali diperkenalkan oleh Marzuki dkk [4]. Pelabelan- $k$  total pada graf  $G$  didefinisikan sebagai pelabelan- $k$  total takteratur total apabila pelabelan total takteratur titik dan juga pelabelan total takteratur sisi. Nilai ketakteraturan total dari graf  $G$ , dinotasikan dengan  $ts(G)$ , adalah minimum  $k$  sedemikian hingga graf  $G$  memiliki pelabelan total takteratur total dengan label paling besar  $k$ . Pada [4] telah membuktikan nilai total ketakteraturan total dari sembarang graf sebagai berikut.

**Teorema 1.4.**

$$ts(G) \geq maks\{tes(G), tvs(G)\}. \blacksquare$$

Ramdani dan Salman [6] menentukan nilai eksak untuk nilai ketakteraturan total dari beberapa graf hasil kali kartesian. Mereka membuktikan bahwa  $ts(C_n \times P_2) = n + 1$  untuk  $n \geq 3$ ;  $ts(S_n \times P_2) = n + 1$  untuk  $n \geq 3$ ;  $ts((P_n + P_1) \times P_2) = \lceil (5n + 1)/3 \rceil$ ; dan  $ts(P_n \times P_2) = n$ .

Pada [7] Ramdani, Salman, dan Assiyatun memberikan nilai ketakteraturan total dari graf regular  $G$  untuk  $n \equiv 3 \pmod 3$ ;  $ts(mG) \leq m \cdot ts(G) - \lfloor (m - 1)/2 \rfloor$ ;  $ts(mC_n) = \lceil (mn + 2)/3 \rceil$ ; dan  $ts(m(C_n \times P_2)) = mn + 1$ . Ketiganya bersama dengan Semaničová-Feňovčíková dan Bača [8] memperkirakan batas atas untuk nilai ketakteraturan total suatu graf dan memberikan nilai eksak untuk nilai ketakteraturan total dari beberapa kelompok graf.

Pada penelitian ini, kami akan menentukan nilai eksak dari pelabelan total takteraturan total dari graf helm dan graf *dream catcher*.

**2. Hasil Penelitian****2.1. Pelabelan Total Takteratur Total pada Graf Helm**

Misalkan  $n$  adalah bilangan bulat,  $n \geq 3$ . Graf helm, disimbolkan  $H_n$ , merupakan graf yang diperoleh dari suatu graf roda- $n$  dengan menambahkan pendan pada setiap titik siklusnya. Banyaknya titik pada graf helm adalah  $2n + 1$ , sedangkan banyaknya sisi adalah  $3n$ . Titik-titik pada graf  $H_n$  dapat dinotasikan dengan  $u, v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_n$  sehingga himpunan sisinya adalah

$$E(G) = \{uv_1, uv_2, \dots, uv_n, v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_nw_n, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_{n+1}, v_nv_n\}$$

Berikut ini diberikan teorema nilai eksak dari nilai total takteratur total dari graf helm.

**Teorema 2.1.** Misalkan  $H_n, n \geq 3$  adalah graf helm. Maka

$$ts(H_n) = n + 1$$

**Bukti.** Perhatikan bahwa  $ts(H_n) = n + 1$ , artinya  $ts(H_n) \geq n + 1$  dan  $ts(H_n) \leq n + 1$ . Pertama akan ditunjukkan bahwa  $ts(H_n) \geq n + 1$ . Perhatikan bahwa banyaknya titik dan banyaknya sisi pada graf  $H_n$  berturut-turut adalah  $2n + 1$  dan  $3n$ , serta  $\delta(H_n) = 1$  dan  $\Delta(H_n) = n$ . Berdasarkan Teorema 1.1 diperoleh

$$tvs(H_n) \geq \left\lceil \frac{2n + 1 + 1}{n + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n + 2}{n + 1} \right\rceil = 2.$$

dan juga berdasarkan Teorema 1.2 diperoleh

$$tes(H_n) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{3n + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil \right\} = \max \left\{ \left\lceil n + \frac{2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil \right\} = \left\lceil n + \frac{2}{3} \right\rceil = n + 1.$$

Kemudian berdasarkan Teorema 1.4 diperoleh

$$ts(H_n) = \max\{tes(H_n), tvs(H_n)\} \geq \max\{n + 1, 2\} = n + 1.$$

Dengan demikian,  $ts(H_n) \geq n + 1$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $ts(H_n) \leq n + 1$ . Definisikan suatu pelabelan total takteratur  $\eta: V(H_n) \cup E(H_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n + 1\}$  seperti berikut.

$$\begin{aligned} \eta(u) &= n + 1 \\ \eta(v_i) &= \eta(w_i) = 1 && , \text{ untuk } i \in [1, n] \\ \eta(uv_i) &= n + 1 && , \text{ untuk } i \in [1, n] \\ \eta(v_i v_{i+1}) &= 1 && , \text{ untuk } i \in [1, n - 1] \\ \eta(v_1 v_n) &= n + 1 && , \text{ untuk } i \in [1, n] \\ \eta(v_i w_i) &= 1 && , \text{ untuk } i \in [1, n] \end{aligned}$$

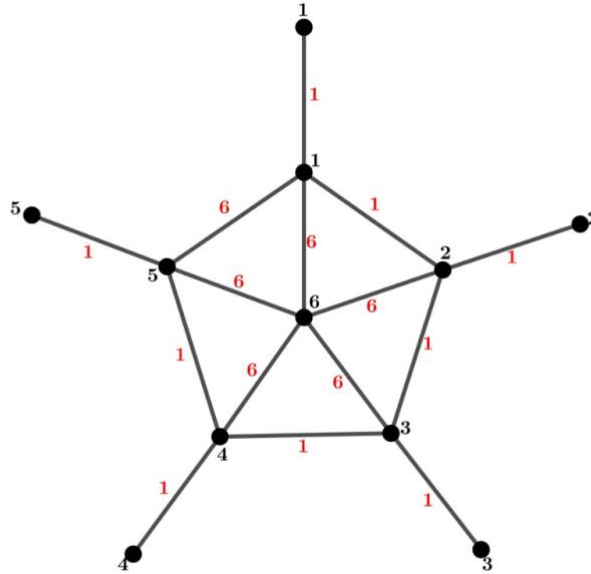
Perhatikan bahwa label semua titik paling banyak  $n + 1$ .

Selanjutnya pandang bobot tiap titik dan sisi pada graf  $H_n$  berikut.

$$\begin{aligned} wt_\eta(u) &= (n + 1)^2 \\ wt_\eta(v_i) &= \begin{cases} 2n + 4 + i & , \text{ untuk } i = 1, n \\ n + 4 + i & , \text{ untuk } i = 2, 3, \dots, n - 1 \end{cases} \\ wt_\eta(w_i) &= i + 1 && , \text{ untuk } i \in [1, n] \\ wt_\eta(uv_i) &= 2(n + 1) + i && , \text{ untuk } i \in [1, n] \\ wt_\eta(v_i v_{i+1}) &= 2i && , \text{ untuk } i \in [1, n] \\ wt_\eta(v_1 v_n) &= 2(n + 1) \\ wt_\eta(v_i w_i) &= 2i + 1 && , \text{ untuk } i \in [1, n] \end{aligned}$$

Sehingga bobot sisi terhadap pelabelan  $\eta$  adalah  $3, 4, 5, \dots, 3n + 2$ . Artinya bobot sisi-sisi pada  $H_n$  berbeda untuk tiap pasang sisi berbeda. Sedangkan untuk bobot titik juga berbeda untuk semua pasang titik berbeda. Akibatnya, pelabelan total pada graf  $H_n$  merupakan pelabelan- $(n + 1)$  total takteratur total. Jadi,  $ts(H_n) = n + 1$ . ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan pelabelan total takteratur total pada graf helm  $H_5$  dengan label terbesar adalah 6 berikut.



**Gambar 1.** Pelabelan Total Takteratur Total Graf Helm  $H_5$

## 2.2. Pelabelan Total Takteratur Total pada Graf *Dream Catcher*

Misalkan  $n$  adalah bilangan bulat. Graf *Dream Catcher* adalah graf yang diperoleh dari graf hasil kali korona  $C_3$  dan  $nK_1$ , disimbolkan  $Dc(3, n)$ . Banyaknya titik dan sisi dari graf *dream catcher* berturut-turut adalah sama, yakni  $3(n + 1)$ . Kemudian himpunan sisinya adalah

$$E(Dc(3, n)) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1w_1, \dots, v_1w_n, v_2w_{n+1}, \dots, v_2w_{2n}, v_3w_{2n+1}, \dots, v_3w_{3n}\}$$

**Teorema 2.2.** Untuk setiap  $n \geq 2$  berlaku

$$ts(Dc(3, n)) = \left\lceil \frac{1 + 3n}{2} \right\rceil$$

**Bukti.** Perhatikan bahwa  $ts(Dc(3, n)) = \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$ . Artinya  $ts(Dc(3, n)) \geq \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$  dan  $ts(Dc(3, n)) \leq \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$ . Banyaknya titik dan banyaknya sisi graf  $Dc(3, n)$  adalah sama, yakni  $3(n + 1)$ . Sedangkan derajat minimunya adalah 1 dan derajat maksimumnya adalah  $n + 2$ . Berdasarkan Teorema 1.2 diperoleh

$$tvs(Dc(3, n)) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{1+3n+3(n+1)}{1+n+2} \right\rceil \right\} = \max \left\{ \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{6n+4}{n+3} \right\rceil \right\} = \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$$

$$\text{atau } tvs(Dc(3, n)) \geq \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil.$$

Berdasarkan Teorema 1.3 juga diperoleh

$$tes(Dc(3, n)) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{3n+5}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \right\} = \max \left\{ \left\lceil n + \frac{5}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \right\} = \left\lceil n + \frac{5}{3} \right\rceil = n + 2$$

atau  $tes(Dc(3, n)) \geq n + 2$ .

Dari nilai  $tvs(Dc(3, n))$  dan  $tes(Dc(3, n))$  tersebut, berdasarkan Teorema 1.4 diperoleh

$$ts(Dc(3, n)) = maks \{tvs(Dc(3, n)), tes(Dc(3, n))\} \geq maks \left\{ \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil, n + 2 \right\} = \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$$

Dengan demikian  $ts(Dc(3, n)) \geq \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $ts(Dc(3, n)) \leq \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$ . Definisikan pelabelan total  $\eta$  sebagai

$$\eta: V(Dc(3, n)) \cup E(Dc(3, n)) \rightarrow \left\{ 1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil \right\}$$

dengan

$$\begin{aligned} \eta(v_i) &= \begin{cases} 1 & , \text{ untuk } i = 1 \\ 2 & , \text{ untuk } i = 2 \\ n + 2 & , \text{ untuk } i = 3 \end{cases} \\ \eta(w_i) &= \left\lceil \frac{1+i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \eta(w_{n+i}) &= \left\lceil \frac{1+n+i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \eta(w_{2n+i}) &= \left\lceil \frac{1+2n+i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \eta(v_1 v_2) &= n \\ \eta(v_1 v_3) &= n + 1 \\ \eta(v_2 v_3) &= n + 1 \\ \eta(v_1 w_i) &= \left\lceil \frac{1+i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \eta(v_2 w_{n+i}) &= \left\lceil \frac{1+n+i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \eta(v_3 w_{2n+i}) &= \left\lceil \frac{1+2n+i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

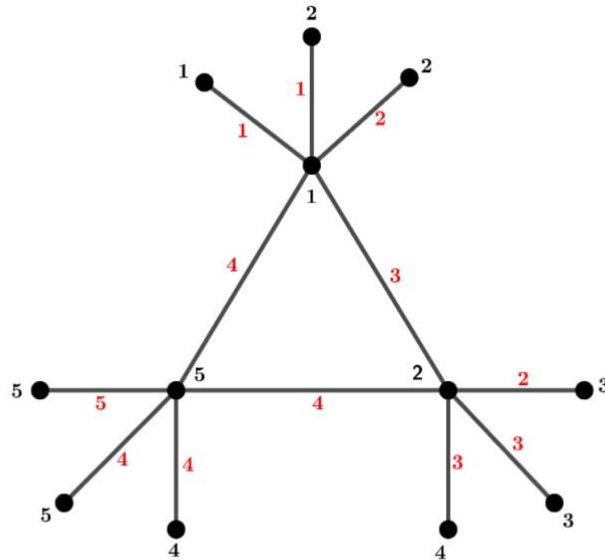
Perhatikan bahwa label semua titik paling banyak  $n + 1$ . Kemudian pandang bobot tiap titik dan sisi pada graf  $Dc(3, n)$  berikut.

$$\begin{aligned} wt_\eta(v_1) &= 2n + 2 + \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{1+i}{2} \right\rceil \\ wt_\eta(v_2) &= 2n + 3 + \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{1+n+i}{2} \right\rceil \\ wt_\eta(v_3) &= 3n + 4 + \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{1+2n+i}{2} \right\rceil \\ wt_\eta(w_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 3n \\ wt_\eta(v_1 v_2) &= 3 + n \\ wt_\eta(v_1 v_3) &= 4 + 2n \\ wt_\eta(v_2 v_3) &= 5 + 2n \\ wt_\eta(v_1 w_i) &= 2 + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_\eta(v_2 w_{n+i}) &= 3 + n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ wt_\eta(v_3 w_{2n+i}) &= 3 + 3n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

sehingga bobot sisi terhadap pelabelan  $\eta$  adalah  $3, 4, 5, \dots, 3n + 3 + i$ . Artinya bobot sisi-sisi pada  $Dc(3, n)$  berbeda untuk tiap pasang sisi berbeda. Sedangkan untuk bobot titik juga berbeda untuk semua pasang titik berbeda. Akibatnya, pelabelan

total pada graf  $Dc(3,n)$  merupakan pelabelan- $\left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$  total takteratur total. Jadi,  $ts(Dc(3,n)) = \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$ . ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan pelabelan total takteratur total pada graf  $Dc(3,3)$  dengan label terbesar adalah 5 berikut.



**Gambar 2.** Pelabelan Total Takteratur Total Graf *Dream Catcher*

### 3. Kesimpulan

Pada kesempatan ini, kami menginvestigasi eksistensi dari pelabelan total takteratur total sebarang graf dan memberikan nilai eksak dari nilai total ketakteraturan total graf helm  $H_n, n \geq 3$  dan graf *dream catcher*  $Dc(3,n)$  berturut-turut sebagai berikut.

$$ts(H_n) = n + 1 \text{ dan } ts(Dc(3,n)) = \left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil.$$

Untuk para peneliti selanjutnya, topik pelabelan total takteratur total ini masih terbuka untuk penelitian pada graf lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bača, M., Jendrol, S., Miller, M., and Ryan, J. (2007). On Irregular Total labelling. *Discrete Math.*, **307**, 1378-1388.
- [2] Chartrand, G., Jacobson, M. S., Lehel, J., Oellermann, O. R., Ruiz, S., and Saba, F. (1988) *Irregular Networks*, **64**, 187-192.
- [3] Gallian, J.A. (2018) A Dynamic Survey of Graph Labeling, *Electron.J.Combin.* **6** (Dynamic Survey DS).
- [4] Marzuki, C.C., Salman, A.N.M., Miller, M. (2013) on the Total Vertex Irregular Strength of Cycles and Paths, *Far East J. Math.Sci.* **82**(1) 1-21.
- [5] Nurdin, Baskoro, E.T., Salman, A.N.M, Gaos, N.N. (2010) On the Total Vertex Irregular Strength of Disjoint Union of Trees, *Discret. Math.* **310** 3043-3048.
- [6] Ramdani, R., Salman, A.N.M. (2009) On the Total Irregularity Strength of some of Cartesian Product graphs, *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **10**(2) 199-209.
- [7] Ramdani, R., Salman, A.N.M., Assiyatun, H. (2015) On the Total Irregularity Strength of Regular Graphs, *J. Math. Fundam. Sci.* **47**(2), no. 3, 281-295.
- [8] Ramdani, R., Salman, A.N.M., Assiyatun, H., and Semaničová-Feňovčíková, and Bača (2016) On the Total Irregularity Strength of Three Families of Graphs, *Math. Comput. Sci.* **9** no. 2, 229-237.
- [9] Wallis, W.D. (2001) *Magic Graph*, Birkhäuser, Boston.