

Bilangan Kromatik Lokasi Disjoint Union Graf Barbel Shadow Lintasan

 **Maharani Damayanti^{1*}**,  **Yunita Widia Putri²**

^{1,2} Institut Teknologi dan Sains Nahdlatul Ulama Lampung

 maharanidamayanti56@gmail.com*

Abstract

This study investigates the locating chromatic number of the disjoint union of barbell shadow path graphs. The locating chromatic number is a variation of the classical chromatic number, ensuring not only that adjacent vertices receive different colors but also that every vertex can be uniquely distinguished through its color code with respect to all color classes. The research focuses on determining the locating chromatic number for the disjoint union of barbell shadow path graphs with $n \geq 3$, odd n , with $m = 1, 2, \dots, 15$. The proof method involves analyzing the graph structure, defining vertex and edge sets, and constructing consistent color codes for all vertices. The results demonstrate that the locating chromatic number of all such graphs is consistently equal to 6. This finding indicates that the complexity of barbell shadow path graph structures does not increase the required number of colors in the disjoint union case. Therefore, the research contributes to strengthening the theory of locating coloring in graphs and provides potential applications in network analysis, coding theory, and optimization systems that require unique identification based on graph structures.

Article Information:

Received April 18, 2025

Revised May 15, 2025

Accepted June 26, 2025

Keywords: locating chromatic number, barbell shadow path graph, disjoint union, graph theory

PENDAHULUAN

Konsep teori graf diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1936 ketika menyelesaikan permasalahan Jembatan Königsberg. Terdapat tujuh buah jembatan di atas Sungai Pregal, Königsberg, Rusia yang menghubungkan empat daerah. Permasalahan Jembatan Königsberg adalah mungkinkah dalam sekali perjalanan melewati tujuh buah jembatan tepat sekali dan kembali ke daerah asal (Sugeng dkk., 2014).

Dalam teori graf, bilangan kromatik adalah konsep fundamental yang digunakan untuk menggambarkan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik suatu graf, dengan syarat bahwa dua titik yang terhubung oleh sisi tidak memiliki warna yang sama. Konsep ini memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang, mulai dari pengaturan jadwal hingga analisis jaringan. Bilangan kromatik graf sering kali memberikan wawasan tentang struktur dan

sifat-sifat topologis graf tersebut.

Salah satu jenis graf yang menarik untuk dipelajari adalah graf barbel. Graf barbel terdiri dari dua komponen yang terhubung oleh satu titik pusat, dan sering digunakan dalam studi tentang hubungan antar titik yang memiliki banyak sisi. Variasi graf barbel dapat melibatkan konsep-konsep lain, seperti shadow lintasan, yang mencerminkan pola konektivitas atau pengaruh lintasan tertentu dalam graf. Penambahan elemen-elemen ini membuat graf barbel shadow lintasan menjadi objek yang kompleks dan menarik untuk dianalisis dalam konteks bilangan kromatik.

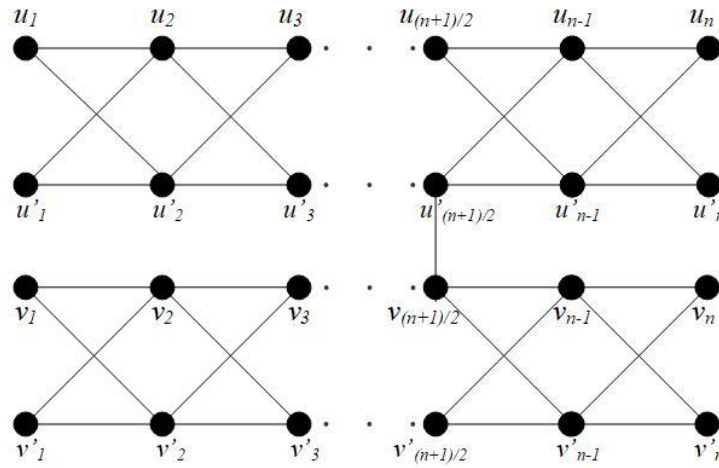
Selain itu, dalam teori graf, terdapat konsep disjoint union dari dua graf, yang berarti penggabungan dua graf terpisah yang tidak memiliki titik atau sisi yang sama. Proses ini memunculkan pertanyaan tentang bagaimana bilangan kromatik berubah ketika dua graf dengan struktur tertentu digabungkan. Dalam konteks graf barbel shadow lintasan, penggabungan graf secara disjoint union dapat menghasilkan struktur graf yang lebih kompleks, yang memerlukan analisis lebih lanjut untuk menentukan bilangan kromatiknya.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji hubungan antara struktur graf barbel shadow lintasan dan bilangan kromatiknya dalam konteks disjoint union. Dengan memahami cara bilangan kromatik berubah seiring dengan penggabungan graf-graf ini, diharapkan dapat ditemukan pola atau teorema baru yang memperkaya pengetahuan dalam teori graf, khususnya dalam hal pewarnaan graf dan aplikasi-aplikasinya.

TINJAUAN PUSTAKA

Menurut (Deo, 1989), Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ himpunan tak kosong dengan elemen-elemennya disebut titik, sedangkan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ (mungkin kosong) adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen di $V(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$ yang anggotanya disebut sisi (*edge*).

Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan atau jiplakan dari graf lengkap yang dihubungkan dengan sebuah sisi (Ihwan dkk., 2014). Graf barbel *shadow* lintasan $B_{D_2(P_n)}$ adalah graf sederhana yang diperoleh dari dua graf *shadow* lintasan yang dihubungkan oleh suatu jembatan, yaitu sisi $\left(u'_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}}\right)$ untuk n ganjil dan $\left(u'_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}}\right)$ untuk n genap.



Gambar 1: Graf Barbel *Shadow Lintasan* $B_{D_2(P_n)}$ untuk n ganjil

Teorema 1 (Asmiati, Damayanti, M., Yulianty, L., 2021)

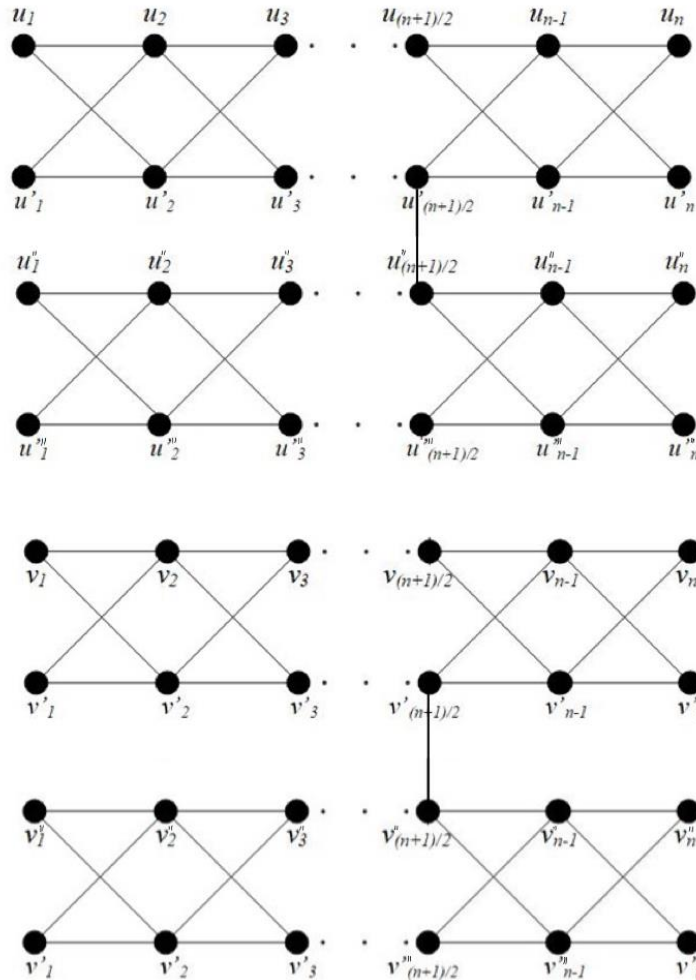
Bilangan kromatik lokasi graf barbel *shadow lintasan* untuk $n \geq 3$, $B_{D_2(P_n)}$ adalah 6.

Disjoint union adalah gabungan dari beberapa graf terhubung, dimana untuk setiap i , G_i adalah graf terhubung, dinotasikan dengan $H = \bigcup_{i=1}^m G_i$. *Disjoint union* dari graf *shadow lintasan* $A = \bigcup_{i=1}^m (D_2(P_{n_i}))$ adalah gabungan dari beberapa graf terhubung *shadow lintasan* $D_2(P_n)$ (Wellyanti, 2014).

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf yang tak terhubung dan c adalah pewarnaan sejati dari G menggunakan warna $1, 2, \dots, k$ untuk beberapa bilangan bulat positif k . Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna c_Π dari v adalah k -pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Bilangan kromatik lokasi dari G adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi, dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$, dimana bilangan kromatik lokasi untuk graf terhubung G , dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ (Asmiati dkk., 2019).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi pada *disjoint union* dari graf barbel *shadow lintasan*. Berikut ini diberikan *disjoint union* dari graf barbel *shadow lintasan* $A = \bigcup_{i=1}^2 (B_{D_2(P_n)})$.



Gambar 2: Disjoint Union dari Graf Barbel Shadow Lintasan $A = B_{D_2(P_{n_1})} \cup B_{D_2(P_{n_2})}$

Teorema 2

Misalkan $B_{D_2(P_n)}$ adalah *disjoint union* dari beberapa graf barbel *shadow lintasan*, dengan $n \geq 3, n$ ganjil, $i \in [1, m], m = 1, 2, \dots, 15$ dan $A = \cup_{i=1}^m B_{D_2(P_{n_i})}$. Maka $\chi'_L(A) = 6$.

Bukti :

Misalkan $B_{D_2(P_n)}$, $n \geq 3$ n ganjil, $i \in [1, m], m = 1, 2, \dots, 15$ adalah *disjoint union* dari graf barbel *shadow lintasan* dengan himpunan titik $V(\cup_{i=1}^m D_2(P_{n_i})) = \{u_{j_i}, u'_{j_i}, u''_{j_i}, u'''_{j_i}, v_{j_i}, v'_{j_i}, v''_{j_i}, v'''_{j_i}; j \in [1, n], i \in [1, m], m = 1, 2, \dots, 15\}$ dan himpunan sisi $E(\cup_{i=1}^m D_2(P_{n_i})) =$

$$\{u_1 u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u'_i u'_{i+1}, v'_i v'_{i+1}, u''_i u''_{i+1}, v''_i v''_{i+1}, u'''_i u'''_{i+1}, v'''_i v'''_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_{i-1} u'_i, u_i u'_{i-1}, v_{i-1} v'_i, v_i v'_{i-1}, u''_{i-1} u'''_i, u'_i u'''_{i-1}, v''_{i-1} v'''_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{u'_{\frac{n+1}{2}} v'_{\frac{n+1}{2}}\}$$

untuk n ganjil.

$$c(u_{j_m}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1 \\ 3, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 5, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$$

$$c(u'_{j_m}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } j = 1 \\ 4, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 6, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 c(u''_{jm}) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1 \\ 4, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 6, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases} & c(v'_{jm}) &= \begin{cases} 4, & \text{untuk } j = 1 \\ 6, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 5, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases} \\
 c(u'''_{jm}) &= \begin{cases} 3, & \text{untuk } j = 1 \\ 5, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 2, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases} & c(v''_{jm}) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1 \\ 6, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 4, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases} \\
 c(v_{jm}) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1 \\ 2, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 3, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases} & c(v'''_{jm}) &= \begin{cases} 5, & \text{untuk } j = 1 \\ 3, & \text{untuk } j = 2n, n \geq 1 \\ 2, & \text{untuk } j = 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kode warna *disjoint union* dari graf barbel *shadow* lintasan $A = \cup_{i=1}^m B_{D_2(P_n)}$, sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 (u_{jm}) &= \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j \geq 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j > 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -3, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -4, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases} \\
 c_{\pi}(u'_{jm}) &= \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j \geq 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -3, j > 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -4, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -5, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -3, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -6, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases} \\
 c_{\pi}(u''_{jm}) &= \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j > 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -3, j \geq 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -5, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -4, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -1, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$c_{\pi}(u'''_{jm}) = \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j \geq 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -4, j > 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -2, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -3, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -3, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -4, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases}$$

$$c_{\pi}(v_{jm}) = \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j > 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j \geq 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -4, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -3, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -1, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -6, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases}$$

$$c_{\pi}(v'_{jm}) = \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j > 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -4, j \geq 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -2, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -3, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -1, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases}$$

$$c_{\pi}(v''_{jm}) = \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j \geq 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j > 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -4, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -3, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -4, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases}$$

$$c_{\pi}(v'''_{jm}) = \begin{cases} j-1, & \text{untuk ordinat ke } -1, j > 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -5, j \geq 1; \\ 0, & \text{untuk ordinat ke } -3, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j \text{ ganjil}, 3 \leq j \leq n; \\ 2, & \text{untuk ordinat ke } -6, j \text{ genap}, 2 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -4, j \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq n; \\ & \text{untuk ordinat ke } -1, j = 1; \\ & \text{untuk ordinat ke } -2, j = 1; \\ 1, & \text{untuk ordinat lainnya.} \end{cases}$$

Bilangan Kromatik Lokasi Disjoint Union Graf Barbel Shadow Lintasan

Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi dengan menggunakan 6 warna. Akibatnya $\chi'_L(A) \leq 6$. Oleh karena itu $\chi'_L(A) = 6$.

KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan dan dibuktikan bilangan kromatik Lokasi *disjoint union* dari graf barbel *shadow* lintasan dengan $n \geq 3, n$ ganjil, $i \in [1, m]$, $m = 1, 2, \dots, 15$ dan $A = \bigcup_{i=1}^m B_{D_2(P_n)}$ adalah 6.

DAFTAR PUSATAKA

- Asmiati, Damayanti, M., dan Yulianti, L., Aldino, Aristoteles dan Juanidi, A. 2021. On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*.5(2):82-93.
- Asmiati, Yulianti, L., Aldino, Aristoteles dan Juanidi, A. 2019. The locating chromatic number of a disjoint union of some double stars. *Journal of Physics*. 1338: 1-5.
- Deo, N. 1989. Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.
- Ihwan, M. D., Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear dan Graf Barbel . *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*. 5(1):39-50.
- Sugeng, K. A., Slamet, S. dan Silaban, D. R. 2014. Teori Graf dan Aplikasinya. Departemen Matematika FMIPA UI, Depok.
- Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R. dan Uttunggadewa, S. 2014. The locating-chromatic number of disconnected graphs. *Far East J. of Math. Sciences*. 94(2):169-182.