

Solusi Eigen Energi dengan Mass Dependent Dibawah Pengaruh Potensial Non-Central Koordinat Bispherical

Pettri Permatasari¹, A Suparmib², C Carib³

Institut Teknologi dan Sains Nahdlatul Ulama Lampung

 ¹pettrisari@gmail.com

Abstrak

Persamaan Schrödinger dengan potensial non-central bertujuan untuk memperoleh fungsi gelombang dan eigen energy nonrelativistik dalam ruang-waktu dengan topologi nonspherical. Potensial non-sentral hasil kombinasi potensial Kratzer plus Poschl Teller dan Rosen Morse Trigonometrik yang dipengaruhi oleh *Position dependent mass* yang dianalisis menggunakan metode *Supersymmetric Quantum Mechanics* (SUSY QM) dengan koordinat bispherical. Persamaan Schrödinger dengan potensial non-sentral secara umum dilakukan pemisahan variabel bagian radial dan sudut. Solusi analitik yang diperoleh untuk penyelesaian fungsi gelombang system tingkat dasar dengan mengaplikasikan operator penurun dan operator penaik untuk fungsi gelombang tingkat atas dengan mengoperasikan fungsi gelombang tingkat dasar. Sedangkan eigen energinya diperoleh menggunakan sifat shape invariant.

Keywords: Persamaan Schrödinger, variable mass dependent, SUSY QM, bispherical coordinate, potensial non-central

Pendahuluan

Persamaan Schrödinger merupakan perumusan matematis yang menjelaskan perubahan tiap waktu dari sistem fisika untuk mempelajari efek mekanika kuantum. Studi mengenai persamaan Schrödinger dalam ruang-waktu dengan topologi nonspherical dan konstanta kosmologis negatif seperti koordinat toroidal [1] dan koordinat bispherical [2] menjadi subjek penelitian yang menarik baru-baru ini. Koordinat bispherical adalah sistem koordinat ortogonal tiga dimensi yang dihasilkan dari sistem koordinat bipolar dua dimensi. Koordinat ini dapat diterapkan diberbagai cabang teori medan makroskopik seperti elektrostatika dan magnetostatika [3]. Beberapa aplikasi Koordinat bispherical (η, θ, λ) dalam bidang makroskopik diantaranya: elektrostatik, magnetostatik, dan difusi steady-state, arus listrik, dan aliran panas [4].

Dalam beberapa tahun terakhir, banyak upaya yang telah dilakukan oleh peneliti untuk mendapatkan solusi analitis dari permasalahan non-sentral [5]. Potensial non-sentral, energi potensialnya merupakan fungsi jarak dan sudut. Potensial ini dipelajari dalam sudut pandang mekanika kuantum non-relativistik dan/atau relativistic [6] dengan menggunakan berbagai metode untuk memecahkan potensial non-central sehingga dapat diperoleh spektrum energy keadaan terikat.

Mekanika kuantum supersimetrik (SUSY-QM) adalah kerangka kerja yang

digunakan untuk menentukan nilai eigen energi dan fungsi eigen secara analitis untuk berbagai model potensial [7], [8]. Untuk menentukan spektrum energi nonrelativistik dapat diperoleh menggunakan SUSY-QM dan gagasan bentuk invariansi, sedangkan fungsi gelombang menggunakan operator SUSY-QM penurunan dan penaik [9]. Metode ini merupakan salah satu metode sederhana yang paling digunakan untuk memperoleh fungsi gelombang.

Dalam paper ini, bagian radial dan sudut dari persamaan Schrödinger tiga dimensi dalam koordinat bispherical diselesaikan menggunakan metode SUSY QM untuk variabel sistem partikel yang dipengaruhi *position dependent* massa dengan potensial non-sentral. Partikel dengan massa yang bergantung pada posisi (efektif) dalam teori kuantum beberapa dekade terakhir telah menarik perhatian karena aplikasinya dalam fisika materi terkondensasi, misalnya, untuk deskripsi the graded crystals, quantum dots, dan metal clusters [10]. Potensial non-sentral yang digunakan hasil kombinasi potensial Kratzer plus Poschl Teller dan Rosen Morse Trigonometrik. Potensi Kratzer adalah salah satu potensial yang paling menarik karena mengandung istilah degeneracy-removing inverse square selain istilah Coulomb [11]. Potensial ini yang telah banyak diterapkan dalam berbagai kelas ilmu fisika dan kimia termasuk fisika atom dan molekuler [11], [12].

Paper ini disusun menjadi beberapa bagian. Dalam Bagian 2 kami memberi ulasan singkat tentang koordinat bispherical, persamaan Schrödinger dengan variabel massa dependent, dan potensial non-sentral hasil kombinasi potensial Kratzer plus Poschl Teller dan Rosen Morse Trigonometrik. Bagian 3, review singkat tentang metode SUSY QM. Bagian 4 kami menyajikan hasil dan pembahasan, dan terakhir bagian 5 yaitu kesimpulan.

Dasar Teori

Bispherical Coordinates

Hubungan koordinat kartesian, koordinat bola, koordinat tabung dan koordinat bispherical pada persamaan Laplace dapat ditentukan dalam persamaan Laplace. Persamaan Laplace dalam sistem koordinat bispherical berfungsi untuk mendistribusikan potensial dan medan keseluruh ruang, terutama pada daerah antara dua bola. System koordinat bispherical didefinisikan dengan tiga variable (β, α, φ) , φ adalah bagian sudut azimuth, dipilih sedemikian rupa sehingga $\varphi = 0$ [13]. Koordinat bispherical terdiri dari tiga bagian antara lain bagian radial, polar angular Persamaan, dan azimuthal angular

$$\mu = \cos^{-1} \left(\frac{r^2 - a^2}{\sqrt{(r^2 - a^2)^2 - 4a^2 z^2}} \right), \eta = \sin^{-1} \left(\frac{2az}{\sqrt{(r^2 - a^2)^2 - 4a^2 z^2}} \right), \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1)$$

Untuk menyelesaikan masalah antar bola eksentrik di mana satu bola berada di dalam bola yang lebih besar panjang confocal-nya adalah

$$a = \frac{\sqrt{r_i^4 + r_o^4 + \delta^4 - 2r_i^2 r_o^2 - 2r_i^2 \delta^2 - 2r_o^2 \delta^2}}{2\delta} \quad (2)$$

δ adalah jarak antara pusat bola bagian dalam dan luar yang masing-masing memiliki jari-jari R_i dan R_o Persamaan Schrödinger dengan variabel massa Transformasi koordinat antara sistem Kartesius dimensi (x, y, z) terkait koordinat

bispherical (μ, η, ϕ) sebagai berikut [14].

$$x = \frac{a \sin \eta \cos \phi}{\cosh \mu - \cos \eta}, y = \frac{a \sin \eta \sin \phi}{\cosh \mu - \cos \eta}, z = \frac{a \sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \eta} \quad (3)$$

Parameter a menentukan skala linier jari-jari pusat bola yang disesuaikan dengan sistem dua bola pada koordinat bispherical. Sistem koordinat ini kita menyelesaikan persamaan Laplace $\Delta\psi(\mu, \eta, \phi) = 0$ (ψ ini adalah potensial listrik) dalam tiga dimensi ketika masalah invarian (simetris) di bawah rotasi.

$$h_\mu^2 = g_{\mu\mu} = \left(\frac{dx}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\mu}\right)^2, \quad h_\eta^2 = g_{\eta\eta} = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2, \quad h_\phi^2 = g_{\phi\phi} = \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \quad (4)$$

Persamaan (4) dapat diselesaikan dengan penjabaran dan differential parsial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\mu} &= \frac{a \cosh \mu (\cosh \mu - \cos \eta)}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} - \frac{(\sinh \mu) a \sinh \mu}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2}, \quad \frac{dx}{d\mu} = \frac{-a \sin \eta \cos \phi \sinh \mu}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2}, \quad \frac{dy}{d\mu} = \frac{-a \sin \eta \sin \phi \sinh \mu}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} \\ \frac{dz}{d\eta} &= \frac{-a \sin \eta \sinh \mu}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2}, \quad \frac{dx}{d\eta} = \frac{a \cos \eta \cos \phi (\cosh \mu - \cos \eta)}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} - \frac{\sin \eta a \sin \eta \cos \phi}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2}, \quad \frac{dy}{d\eta} = \frac{a \sin \eta \cos \phi}{\cosh \mu - \cos \eta} \frac{dy}{d\eta} = \\ \frac{a \cos \eta \sin \phi (\cosh \mu - \cos \eta)}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} - \frac{\sin \eta a \sin \eta \sin \phi}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2}, \quad \frac{dz}{d\phi} &= 0, \quad \frac{dx}{d\phi} = \frac{-a \sin \eta \sin \phi}{\cosh \mu - \cos \eta} \end{aligned} \quad (5)$$

Berdasarkan Persamaan (5) dapat menentukan skala faktor koordinat bispherical μ, η , and ϕ ,

$$h_1 = h_\mu = \frac{a}{\cosh \mu - \cos \eta} = h_2 = h_\eta, \quad h_3 = h_\phi = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \mu - \cos \eta} \quad (6)$$

elemen garis koordinat ortogonal adalah

$$ds^2 = d\vec{r}^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \quad d\vec{r} = h_\mu \hat{\mu}_0 d\mu + h_\eta \hat{\eta}_0 d\eta + h_\phi \hat{\phi}_0 d\phi \quad (7)$$

$\hat{\mu}_0, \hat{\eta}_0, \hat{\phi}_0$ merupakan unit vektor koordinat bispherical. Dengan menggunakan prinsip divergensi

$$\nabla \cdot \vec{V} = \lim_{\int dt \rightarrow 0} \frac{\int \vec{V}_j d\vec{s}}{\int dt} \quad (8)$$

Dengan menggunakan divergensi vektor dalam koordinat bispherical, maka diperoleh

$$\nabla \cdot \vec{V}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right\} \quad (9)$$

Operator diferensial $\vec{\nabla} = \nabla\psi$ diselesaikan dengan menggunakan prinsip gradient. Dimana solusi ψ sebagai fungsi variable pemisah

$$\nabla\psi = \frac{\hat{q}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\hat{q}_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\hat{q}_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \quad (10)$$

$\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ is a merupakan satuan vektor. Persamaan (12) dan (13) diselesaikan menggunakan prinsip gradien dan divergensi

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \nabla\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right\} \quad (11)$$

Sistem koordinat bispherical (μ, η, ϕ) , dimana ϕ adalah sudut azimuth dengan nilai $\phi = 0$ [3, 4, 39]. Persamaan Laplacian untuk sistem koordinat bispherical

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_\mu^3} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\mu \sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\mu}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \quad (12)$$

Persamaan Schrödinger 3D koordinat bispherical

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{h_\mu^3} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\mu \sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_\mu}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \right\} + V(\mu, \eta, \phi) \psi = E \psi \quad (13)$$

Persamaan (13) adalah persamaan Schrödinger yang direduksi dan diturunkan secara lebih sederhana dengan mensubstitusikan pemisah variable dari persamaan Laplace yang disetting $\Psi = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} F(\mu, \eta, \phi)$ sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) = a \left[\frac{\frac{1}{2} \cosh^2 \mu - \frac{1}{2} \cosh \mu \cos \eta - \frac{3}{4} (\cosh^2 \mu - 1)}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{5}{2}}} \right] F + a (\cosh \mu - \cos \eta)^{-\frac{1}{2}} F'' \quad (A)$$

$$\frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\mu \sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = a \left(\frac{1}{\sin \eta} \frac{\cos \eta F'}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\sin \eta F''}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{a (\cos \eta \cosh \mu - \frac{1}{4} \cos^2 \eta - \frac{3}{4}) F}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{5}{2}}} \quad (B)$$

Persamaan (A) dan (B) dijumlahkan

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(h_\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\mu \sin \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] = \left\{ -\frac{a}{4} \frac{F}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} + a \frac{\frac{d^2 F}{d\mu^2}}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{\sin \eta} \left(\frac{\cos \eta \frac{dF}{d\eta}}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sin \eta \frac{d^2 F}{d\eta^2}}{(\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \quad (C)$$

$$\frac{h_\mu}{\sin^2 \eta} \frac{d^2 (\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}} F}{d\phi^2} = \frac{a (\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 \eta (\cosh \mu - \cos \eta)} \frac{d^2 F}{d\phi^2} = \frac{a}{\sin^2 \eta (\cosh \mu - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} \frac{d^2 F}{d\phi^2} \quad (D)$$

Persamaan (C) dan (D) disubstitusikan ke dalam Persamaan (10), diperoleh persamaan umum Schrödinger pada koordinat bispherical.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{h_\mu^2} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{1}{4} F \right\} + VF = EF \quad (14)$$

Bentuk persamaan Schrödinger potensial non-central dari koordinat bispherical.

Mensubstitusi Persamaan Laplace (14), (6), dan potensial non-central menjadi persamaan Schrödinger tiga dimensi

$$\frac{(\cosh \mu - \cos \eta)^2}{a^2} \left[-\frac{F}{4} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right] - \frac{2m}{\hbar^2} \left(V(\mu) + V(\eta) + V\left(\frac{\phi}{\sin^2 \eta}\right) \right) F = -\frac{2m}{\hbar^2} EF \quad (15)$$

Formulasi position dependent mass yang disetting dalam penelitian ini agar persamaan Schrödinger dapat diselesaikan secara analitik maupun eksak adalah sebagai berikut,

$$m = \frac{m_0}{h_\mu^2} \approx \frac{m_0 (\cosh \mu - \cos \eta)^2}{a^2} \quad (16)$$

Diperoleh,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{2m_0}{\hbar^2} \left(V(\mu) + V(\eta) + V\left(\frac{\phi}{\sin^2 \eta}\right) \right) F = \left(\frac{1}{4} - \frac{2m_0}{\hbar^2} E \right) F \quad (17)$$

dimana

$$F = M(\mu)H(\eta)P(\phi) \quad (18)$$

Potensial Non-Sentral Hasil Kombinasi Potensial Kratzer Plus Poschl Teller Dan Rosen Morse Trigonometrik

Potensial Kratzer telah memainkan peran penting dalam fisika atom dan molekuler serta kimia kuantum. Potensial tipe ini telah digunakan secara luas untuk menggambarkan struktur molekul dan interaksinya [15]. Potensial Kratzer digunakan pada bagian radial dengan variabel μ . Sehingga, potensial Kratzer yang digunakan yaitu

$$V(\mu) = -2D_e \left(\frac{a}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\mu^2} \right) \quad (19)$$

Potensial ini juga termasuk potensial anharmonik yang dapat mempelajari getaran tekukan di luar bidang [16]. Potensial Poschl Teller digunakan pada bagian sudut angular dengan variabel η . Sehingga, bentuk potensial Poschl Teller [17] yang digunakan yaitu

$$V(\eta) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2 \eta} + \frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} \right] \quad (20)$$

Potensial Pöschl-Teller $V(\eta)$ diatur oleh dua parameter, parameter κ dan χ menyesuaikan derajat asimetri, dan simetris sempurna untuk $\kappa = \chi$ [18]. Dimana m_0 adalah massa suatu partikel. Selanjutnya, Potensial Rosen-Morse merupakan salah satu kandidat potensial yang digunakan untuk mendeskripsikan fungsi eigen dan spektrum energi kurungan kuantum dalam kromodinamika kuantum (QCD) [19]. Potensial TRM digunakan pada bagian sudut azimuthal dengan variabel ϕ . Sehingga, bentuk potensial TRM [20]. yang digunakan yaitu

$$V(\phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi \right) \quad (21)$$

Dimana ρ dan q adalah kedalaman parameter potensial Rosen Morse, dengan $\rho > 1, q > 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

Metode Supersimetri Mekanika Kuantum

Witten mendefinisikan system supersimetri mekanika kuantum [21], system supersimetri yang terdiri dari operator-operator supermuatan yang komut supersimetri Hamiltonian

$$[Q_i, H_{ss}] = 0 \text{ and } i = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

N adalah banyaknya generator yang memenuhi hubungan anti komutasi.

$$[Q_i, Q_j] = \delta_{ij} H_{ss} \quad (23)$$

System SUSY yang paling sederhana $N = 2$. Operator super muatan Q_1 dan Q_2 dapat diasosiasikan dengan partikel spin $\frac{1}{2}$ yang dapat bergerak pada garis lurus didefinisikan sebagai berikut

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_1 \frac{p}{\sqrt{2m}} + \sigma_2 \phi(x) \right) \text{ and } Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sigma_1 \phi(x) + \sigma_2 \frac{p}{\sqrt{2m}} \right) \quad (24)$$

σ_1, σ_2 adalah matrik pauli dan $\phi(x)$ adalah superpotensial, dimana $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ momentum linear (momentum bosonic). Persamaan (23) dan (24) dapat diperoleh

$$H_{ss} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\phi}{dx} + \phi^2 & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\phi}{dx} + \phi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \quad (25)$$

dimana

$$H_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x), \text{ with } V_+(x) = \phi^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\phi}{dx} \quad (26a)$$

$$H_- = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x), \text{ dengan } V_-(x) = \phi^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\phi}{dx} \quad (26b)$$

$V_-(x)$ and $V_+(x)$ masing-masing adalah pasangan potensial supersimetri. Sehingga Persamaan (22) dapat menimbulkan energy terdegenerasi H_- dan H_+ , SUSY partner Hamiltonian Fermionik (penurun) dan Bosonik (penaik). Berdasarkan Persamaan (26) dapat difaktorkan menjadi

$$H_- = A^+ A \text{ dan } H_+ = A A^+ \quad (27)$$

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \Phi(x), A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \Phi(x) \quad (28)$$

Sepasang potensial supersimetri dikatakan shape invariance apabila kedua potensial memiliki bentuk yang sama hanya dibedakan oleh parameter pada potensial tersebut dan memenuhi syarat seperti,

$$V_+(x; a_j) = V_-(x; a_{j+1}) + R(a_{j+1}) \quad (29)$$

$$V_+(x; a_j) = \phi^2(x; a_j) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \phi'(x; a_j) \text{ dan } V_-(x; a_j) = \phi^2(x; a_j) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \phi'(x; a_j) \quad (30)$$

$$R(a_1) = V_+(a_0, \mu) - V_-(a_1, \mu) \text{ dan } R(a_2) = V_+(a_1, \mu) - V_-(a_2, \mu) \quad (31)$$

dimana $j = 0, 1, 2, \dots, a$ adalah parameter yang ditentukan secara berturutan (rekursif), $a_{j+1} = f(a_j)$ and $R(a_j)$ konstanta yang tidak bergantung terhadap x , $\phi'(x, a_j)$ adalah turunan pertama $\phi(x, a_j)$. Hubungan antara Hamilton umum dan Hamiltonian SUSY dinyatakan sebagai berikut

$$H = H_- + \varepsilon = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x; a_0) + \varepsilon \quad (32)$$

$$V(x) = V_-(x; a_0) + \varepsilon = \phi^2(x; a_0) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \phi'(x; a_j) + \varepsilon \quad (33)$$

Dimana (x) sering dinyatakan sebagai Potensial Efektif (V_{eff}). Sedangkan $\phi(x)$ ditentukan dengan dugaan secara intelektual berdasarkan bentuk potensial efektif sistem terkait. Prosedur penjabaran H_0 ke H_1 , diteruskan ke Hamiltonian yang lebih tinggi dan akhirnya diperoleh generalisasi seperti,

$$H^s = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x; a_s) + \sum_{k=1}^s R(a_k) \quad (34)$$

Dari Persamaan (34) diasumsikan $H_- = H_0$ bila dioperasikan pada fungsi gelombang tingkat dasar maka akan diperoleh spectrum energy (eigenvalues) dari H_n .

$$E_n^{(-)} = \sum_{k=1}^s R(a_k) \quad (35)$$

Energy spektrum tingkat dasar dapat diperoleh,

$$E_n = E_0^{(-)} + \varepsilon \quad (36)$$

E_0 merupakan Energy tingkat. Untuk menentukan fungsi gelombang tingkat dasar $A\psi_0^{(-)}$ dapat dicirikan dengan lowering operator (A) Hamiltonian, (A^+) apabila dioperasikan maka hasilnya sama dengan nol

$$A\psi_0^{(-)} = 0 \quad (37)$$

untuk memperoleh fungsi gelombang tereksitasi dapat dicirikan dengan raising operator (A^+) Hamiltonian yang diperoleh dari operasi berantai (A^+) terhadap gelombang tingkat dasar

$$\psi_n^{(-)}(x; a_0) \approx A^+(x; a_0)\psi_{n-1}^{(-)}(x; a_1) \quad (38)$$

Selanjutnya, penyelesaian persamaan Schrödinger koordinat bispherical untuk sistem tiga dimensi

Hasil dan Pembahasan

Persamaan Schrödinger potensial non-sentral Kratzer plus Poschl-Teller dan Rosen Morse trigonometri. merupakan potensial yang hadir secara simultan dalam sistem kuantum. Potensial non-sentral ini dinyatakan sebagai

$$V(\mu, \eta, \phi) = -2D_e \left(\frac{a}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\mu^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2 \eta} + \frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} \right] + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi \right) \quad (39)$$

Bentuk persamaan Schrödinger tiga dimensi untuk Potensial Kratzer plus Poschl Teller dan Rosen-Morse trigonometri dinyatakan,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right] + \left(-2D_e \left(\frac{a}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\mu^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2 \eta} + \frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} \right] + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi \right) \right) F + \frac{1}{4} F = EF \quad (40)$$

Dari Persamaan (40) diperoleh persamaan Schrödinger fungsi bagian radial, sudut dan azimut, secara berurutan dalam bentuk,

$$\frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} - \frac{2m_0}{\hbar^2} \left[-2D_e \left(\frac{a}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\mu^2} \right) \right] - \frac{1}{4} - \lambda_1 + \frac{2m_0}{\hbar^2} E = +\lambda_2 \quad (41)$$

$$-\frac{1}{H \sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) - \frac{2m_0}{\hbar^2} \left[\frac{\kappa(\kappa-1) - \frac{1}{4}}{\sin^2 \eta} + \frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} \right] = \lambda_2 \quad (42)$$

$$-\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left(\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi \right) = \lambda_1 \sin^2 \eta \quad (43)$$

Solusi Potensial Non-Central Bagian Azimuth

Persamaan (43) dapat ditulis kembali

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi \right) P = \frac{\hbar^2}{2m_0} \lambda_1 P \sin^2 \eta \quad (44)$$

Dari Persamaan (44) dapat diperoleh potensial efektif dan energy tingkat dasar.

$$V_{eff} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi \right) \text{ dan } E_{n\phi}''' = \frac{\hbar^2}{2m_0} \lambda_1 \sin^2 \eta \quad (45)$$

Dengan dugaan yang tajam, maka superpotensial dari Persamaan (44) adalah,

$$\Phi(\phi) = A \cot \phi - \frac{B}{A} \quad (46)$$

Persamaan (45), dan (46) disubstitusikan ke dalam Persamaan (33) diperoleh,

$$A^2 \csc^2 \phi - A^2 - 2B \cot \phi + \frac{B^2}{A^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} A \csc^2 \phi = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi \right) - \varepsilon \quad (47)$$

Dengan menyamakan koefisien dari variabel sisi kanan dan kiri Persamaan (47) dapat diperoleh nilai konstanta A , B dan ε

$$A = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}}(\rho+1); B = \frac{\hbar^2}{2m_0}q; \text{ dan } \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left((\rho+1)^2 - \frac{q^2}{(\rho+1)^2} \right) \quad (48)$$

Persamaan (30), (47), dan (48), untuk menentukan hubungan pasangan potensial yang memiliki bentuk invarian, seperti

$$V_-(\rho_0, \phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\rho(\rho+1)}{\sin^2 \phi} - (\rho+1)^2 - 2q \cot \phi + \frac{q^2}{(\rho+1)^2} \right], V_+(\rho_0, \phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\rho^2+3\rho+2}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi - (\rho+1)^2 + \frac{q^2}{(\rho+1)^2} \right] \quad (49)$$

Dengan mensetting parameter baru $\rho_1 = \rho + 1$ dari parameter $\rho_0 = \rho$

$$V_-(\rho_1, \phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{(\rho+1)(\rho+2)}{\sin^2 \phi} - 2q \cot \phi - (\rho+2)^2 + \frac{q^2}{(\rho+2)^2} \right] \quad (50)$$

maka diperoleh

$$R(a_1) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[(2\rho+3) + \frac{q^2}{(\rho+1)^2} - \frac{q^2}{(\rho+2)^2} \right], R(a_2) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[(2\rho+5) + \frac{q^2}{(\rho+2)^2} - \frac{q^2}{(\rho+3)^2} \right] \quad (51)$$

Nilai eigen energy untuk bagian azimuth

$$E_n^{(-)} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[(2\rho+2n+1) + \frac{q^2}{(\rho+n)^2} - \frac{q^2}{(\rho+n+1)^2} \right] \quad (52)$$

Diperoleh besarnya energy bagian azimuth

$$E_{n\phi} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left((\rho+1+n_\phi)^2 - \frac{q^2}{(\rho+1+n_\phi)^2} \right) \quad (53)$$

Nilai λ_1 yang ditulis

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sin^2 \eta} \left((\rho+1+n_\phi)^2 - \frac{q^2}{(\rho+1+n_\phi)^2} \right) \quad (54)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (46) ke dalam Persamaan (28) dapat diperoleh operator penaik dan penurun

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{d}{d\phi} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} (\rho+1) \cot \phi + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{q}{(\rho+1)}, A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{d}{d\phi} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} (\rho+1) \cot \phi + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{q}{(\rho+1)} \quad (55)$$

Sehingga dari Persamaan (55) dan (37) diperoleh fungsi gelombang tingkat dasar,

$$\psi_0 = C \sin(\phi)^{(\rho+1)} \exp\left(-\frac{q\phi}{(\rho+1)}\right) \quad (56)$$

Fungsi gelombang tereksitasi dapat diperoleh dengan meninjau Persamaan (38) dan (55) sebagai berikut,

$$\psi_1 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} C \left\{ \left[(2\rho + 3) \cos \phi - \frac{q(2\rho+3)}{(\rho+2)(\rho+1)} \sin(\phi) \right] \times \left[\sin(\phi)^{(\rho+1)} \exp\left(-\frac{q\phi}{(\rho+2)}\right) \right] \right\} \quad (57)$$

Solusi Potensial Non-Central Bagian Angular

Selanjutnya menyelesaikan persamaan Schrödinger bagian angular, kita asumsikan $H = \frac{K}{\sqrt{\sin \eta}}$ dari Persamaan (41) diperoleh,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\kappa(\kappa-1) - \frac{1}{4}}{\sin^2 \eta} + \frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} \right] K = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{4} + \lambda_2 \right) K \quad (58)$$

Persamaan (63) dapat menentukan potensial efektif dan energy tingkat dasar bagian angular.

$$V_{eff} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\kappa'(\kappa'-1)}{\sin^2 \eta} + \frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} \right] \text{ dan } E''_{n\eta} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{4} + \lambda_2 \right) \quad (59)$$

Formula superpotensial dari Persamaan (59) dapat ditulis

$$\Phi(\eta) = A \tan \eta + B \cot \eta \quad (60)$$

Persamaan (59), (60), dan (33) dapat diperoleh,

$$A^2 (\sec^2 \eta - 1) + B^2 (\csc^2 \eta - 1) + 2AB - \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} (A \sec^2 \eta - B \csc^2 \eta) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\kappa'(\kappa'-1)}{\sin^2 \eta} + \frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} \right] - \varepsilon \quad (61)$$

Menyamakan koefisien variable Persamaan (61) dapat ditulis

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \chi; B = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \kappa'; \text{ dan } \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\chi + \kappa')^2 \quad (62)$$

Menentukan hubungan pasangan potensial Persamaan (30) dan (62) yang memiliki bentuk invarian

$$V_-(\chi_0, \kappa'_0, \eta) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\chi(\chi-1)}{\cos^2 \eta} + \frac{\kappa'(\kappa'-1)}{\sin^2 \eta} - (\chi + \kappa')^2 \right], V_+(\kappa'_0, \chi_0, \eta) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\chi(\chi+1)}{\cos^2 \eta} + \frac{\kappa'(\kappa'+1)}{\sin^2 \eta} - (\chi + \kappa')^2 \right] \quad (63)$$

Dengan mensetting parameter baru $\chi_1 = \chi + 1$ dan $\kappa'_1 = \kappa' + 1$ dari parameter $\chi_0 = \chi$ dan $\kappa'_0 = \kappa'$

$$V_-(\kappa'_1, \chi_1, \eta) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\chi(\chi+1)}{\cos^2 \eta} + \frac{\kappa'(\kappa'+1)}{\sin^2 \eta} - (\chi + \kappa' + 2)^2 \right] \quad (64)$$

Persamaan (31), (62), (63), dan (64) maka diperoleh

$$R(a_1) = \frac{\hbar^2}{2m_0} (4\chi + 4\kappa' + 4), R(a_2) = \frac{\hbar^2}{2m_0} (4\chi + 4\kappa' + 12) \quad (65)$$

Persamaan (35) dan persamaan (36) dapat menentukan nilai eigen energy untuk bagian Angular

$$E_{n_\eta}^{(-)} = \frac{\hbar^2}{2m_0} 4(\chi + \kappa' + 2n_\eta - 1), E_{n_\eta} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (\chi + \kappa' + 2n_\eta)^2 \quad (66)$$

Berdasarkan Persamaan (59) dan (66), dapat diperoleh nilai λ_2 yang ditulis

$$\lambda_2 = -(\chi + \kappa' + 2n_\eta)^2 - \frac{1}{4} \quad (67)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (60) ke dalam Persamaan (27) dapat diperoleh penurunan dan kenaikan operator

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{d}{d\eta} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} (\chi \tan \eta - \kappa' \cot \eta), A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \frac{d}{d\eta} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} (\chi \tan \eta - \kappa' \cot \eta) \quad (68)$$

Sehingga dari Persamaan (68) dan (37) diperoleh fungsi gelombang tingkat dasar,

$$\psi_0^{(-)} = C \cos(\mu)^\chi \sin(\mu)^{\kappa'} \quad (69)$$

Fungsi gelombang tereksitasi dapat diperoleh dengan meninjau Persamaan (38) dan (68) sebagai berikut,

$$\psi_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} C \{ [(2\chi + 1) \sin^2(\eta) + (-2\kappa' - 1) \cos^2(\eta) -] \times [\cos(\eta)^\chi \sin(\eta)^{\kappa'}] \} \quad (70)$$

Solusi Potensial Non-Central Bagian Radial

Persamaan Schrödinger bagian Radial Persamaan (40) dapat ditulis kembali sebagai berikut,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} + \left[\left(-\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu^2} \right) \right] M = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{4} - \frac{2m_0}{\hbar^2} E + \lambda_1 + \lambda_2 \right) M \quad (71)$$

dimana $A = 2D_e a$ dan $B = D_e a^2$. Persamaan (80) dapat menentukan potensial efektif dan energy tingkat dasar bagian radial.

$$V_{eff} = -\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu^2} \text{ dan } E'_{n\mu} = E_{n\mu} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{4} + \lambda_1 + \lambda_2 \right) \quad (72)$$

Formula superpotensial dari Persamaan (72) dapat ditulis

$$\Phi(\mu) = F + \frac{G}{\mu} \quad (73)$$

Persamaan (72), (73) dan (33) dapat diperoleh,

$$F^2 + 2 \frac{FG}{\mu} + \frac{G^2}{\mu^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{G}{\mu^2} = -\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu^2} - \varepsilon \quad (74)$$

Menyamakan koefisien variable Persamaan (74) dapat ditulis

$$F = \frac{A}{2 \left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} \right)}; G = - \left(\frac{\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B}}{+ \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}} \right); \text{ dan } \varepsilon = - \frac{A^2}{4 \left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} \right)^2} \quad (75)$$

Menentukan hubungan pasangan potensial Persamaan (30) dan (75) yang memiliki bentuk invarian

$$V_-(\mu; a_0) = \frac{A^2}{4\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)^2} - \frac{A}{\mu} + \frac{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}}\right)}{\mu^2} \quad (76)$$

$$V_+(\mu; a_0) = \frac{A^2}{4\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)^2} - \frac{A}{\mu} + \frac{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}}\right)}{\mu^2} \quad (77)$$

Dengan parameter baru $a_1 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}}$ dari parameter $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}$

$$V_-(\mu; a_1) = \frac{A^2}{4\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)^2} - \frac{A}{\mu} + \frac{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}}\right)}{\mu^2} \quad (78)$$

Persamaan (31), (78) maka diperoleh

$$R(a_1) = \frac{A^2}{4\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)^2} - \frac{A^2}{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{2\hbar}{\sqrt{2m_0}}\right)^2} \quad (79)$$

Nilai eigen energy untuk bagian radial

$$E_n^{(-)} = \frac{A^2}{4\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)^2} - \frac{A^2}{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{n\hbar}{\sqrt{2m_0}}\right)^2} \quad (80)$$

$$E'_{n\mu} = - \frac{D_e^2 a^2}{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + D_e a^2} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{n\hbar}{\sqrt{2m_0}}\right)^2} \quad (81)$$

Berdasarkan Persamaan (72) dan (81), dapat diperoleh eigen energy yang ditulis

$$E_{n\mu} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}} \left(\frac{1}{\sin^2 \eta} \left(\frac{(\rho + 1 + n_\phi)^2}{q^2} - \right) - (\chi + \kappa' + 2n_\eta)^2 \right) - \frac{A^2}{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} + \frac{n_\mu \hbar}{\sqrt{2m_0}}\right)^2} \quad (82)$$

di mana m_0 adalah konstanta massa partikel elementer $\rho, q, \chi, \kappa, \sigma, \tau$ masing-masing adalah parameter konstanta potensial Non-Sentral, n_μ, n_η, n_ϕ masing-masing bilangan kuantum orbital, $\hbar$ adalah konstanta Planck, $E_{n\mu}$ adalah energi eigen system, dan $\kappa' = \frac{1}{2} + \sqrt{\kappa(\kappa - 1)}$ Fungsi gelombang tingkat dasar dan fungsi gelombang tereksitasi,

$$\Psi_0^{(-)}(\mu, a_0) = C e^{-\frac{\sqrt{2m_0}}{\hbar} \left(\frac{A\mu}{2\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}\right)} - \frac{\sqrt{2m_0}}{\hbar} \left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}} \right) \right)} \quad (83)$$

$$\psi_1^{(-)}(\mu, a_1) = - \left[\frac{\frac{A}{2\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B + \frac{3\hbar}{2\sqrt{2m_0}}}\right)\mu} + \frac{A}{2\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0}}}\right)} + \frac{\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_0}}}\right)}{\mu} \right] \times C \left(e^{\frac{\sqrt{2m_0}}{\hbar} \frac{A\mu}{2\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B + \frac{3\hbar}{2\sqrt{2m_0}}}\right)\mu} - \frac{\sqrt{2m_0}}{\hbar} \left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{8m_0} + B + \frac{3\hbar}{2\sqrt{2m_0}}}\right)} \right) \quad (84)$$

Kesimpulan

Dalam paper ini dijelaskan solusi analitik persamaan Schrödinger di bawah pengaruh variable massa dependent kerangka koordinat bispherical (μ, θ, ϕ) untuk potensial non sentral kombinasi dari potensial Kratzer plus Poschl Teller dan Rosen Morse Trigonometri. Persamaan Schrodinger yang bergantung posisi (μ, θ, ϕ) dengan variable massa dependent menggunakan metode pemisahan variabel dan menghasilkan tiga persamaan Schrodinger satu dimensi, masing-masing sebagai fungsi radial (μ) , angular (θ) , dan azimuthal (ϕ) . Spektrum energi dan fungsi gelombang dari potensial non-sentral dianalisis menggunakan metode Supersymmetri mekanika kuantum.

References

- [1] S. Faniandari, A. Suparmi, and C. Cari, "Analytical solution of Schrödinger equation for Yukawa potential with variable mass in toroidal coordinate using supersymmetric quantum mechanics," *Period. Tche Quim.*, vol. 17, no. 35, pp. 100–108, 2020.
- [2] P. Permatasari, A. Suparmi, C. Cari, D. ABilaut, and S. Faniandari, "Solution of Schrödinger equation with position-dependent mass in the bispherical coordinate system for Gendenshtein III central potential using supersymmetric quantum mechanic method," *AIP Conf. Proc.*, vol. 2296, 2020, doi: 10.1063/5.0030711.
- [3] R. D. Stoy, "Solution procedure for the Laplace equation in bispherical coordinates for two spheres in a uniform external field: Parallel orientation," *J. Appl. Phys.*, vol. 65, no. 7, pp. 2611–2615, 1989, doi: 10.1063/1.342791.
- [4] B. Roy and P. Roy, "A Lie algebraic approach to effective mass Schrödinger equations," *J. Phys. A. Math. Gen.*, vol. 35, no. 17, pp. 3961–3969, 2002, doi: 10.1088/0305-4470/35/17/310.
- [5] P. Civicioglu, "Transforming geocentric cartesian coordinates to geodetic coordinates by using differential search algorithm," *Comput. Geosci.*, vol. 46, pp. 229–247, 2012, doi: 10.1016/j.cageo.2011.12.011.
- [6] A. Arda and R. Sever, "Exact solutions of the Morse-like potential, step-up and step-down operators via Laplace transform approach," *Commun. Theor. Phys.*, vol. 58, no. 1, pp. 27–30, 2012, doi: 10.1088/0253-6102/58/1/05.
- [7] M. Aktaş and R. Sever, "Exact supersymmetric solution of Schrödinger equation for central confining potentials by using the Nikiforov-Uvarov method," *J. Mol. Struct.*

- THEOCHEM*, vol. 710, no. 1-3, pp. 223-228, 2004, doi: 10.1016/j.theochem.2004.09.011.
- [8] M. Abu-Shady and S. Y. Ezz-Alarab, "Trigonometric Rosen-Morse Potential as a Quark-Antiquark Interaction Potential for Meson Properties in the Non-relativistic Quark Model Using EAİM," *Few-Body Syst.*, vol. 60, no. 4, 2019, doi: 10.1007/s00601-019-1531-y.
- [9] Suparmi and Cari, "Bound state solution of dirac equation for generalized pöSchl-Teller plus trigonometric Pöschl-Teller Non-Central potential using SUSY quantum mechanics," *J. Math. Fundam. Sci.*, vol. 46, no. 3, pp. 205-223, 2014, doi: 10.5614/j.math.fund.sci.2014.46.3.1.
- [10] V. M. Tkachuk and O. Voznyak, "Effective Hamiltonian with position-dependent mass and ordering problem," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 130, no. 8, pp. 10-13, 2015, doi: 10.1140/epjp/i2015-15161-x.
- [11] H. Hassanabadi, H. Rahimov, and S. Zarrinkamar, "Approximate solutions of Klein-Gordon equation with Kratzer potential," *Adv. High Energy Phys.*, vol. 2011, no. September, 2011, doi: 10.1155/2011/458087.
- [12] S. Suparmi, D. A. Dianawati, and C. Cari, "Solution of Q-Deformed D-Dimensional Klein-Gordon Equation Kratzer Potential using Hypergeometric Method," *J. Penelit. Fis. dan Apl.*, vol. 9, no. 2, p. 163, 2019, doi: 10.26740/jpfa.v9n2.p163-177.
- [13] O. Ozer, F. Uzg, B. Ulent, and G. On, "1. Introduction," vol. 17, no. 37, pp. 2453-2465, 2002.
- [14] P. H. Gilbert and A. J. Giacomini, "Transport phenomena in bispherical coordinates," *Phys. Fluids*, vol. 31, no. 2, 2019, doi: 10.1063/1.5054581.
- [15] M. R. Setare and E. Karimi, "Algebraic approach to the Kratzer potential," *Phys. Scr.*, vol. 75, no. 1, pp. 90-93, 2007, doi: 10.1088/0031-8949/75/1/015.
- [16] Y. Xu, S. He, and C. S. Jia, "Approximate analytical solutions of the Dirac equation with the Pöschl-Teller potential including the spin-orbit coupling term," *J. Phys. A Math. Theor.*, vol. 41, no. 25, 2008, doi: 10.1088/1751-8113/41/25/255302.
- [17] Cari, Suparmi, and A. Saregar, "Solution of the Schrödinger Equation for Trigonometric Scarf Plus Poschl-Teller Non-Central Potential Using Supersymmetry Quantum Mechanics," *Indones. J. Appl. Phys.*, vol. 04, no. 1, pp. 1-13, 2014.
- [18] H. Yildirim and M. Tomak, "Nonlinear optical properties of a Pöschl-Teller quantum well," *Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys.*, vol. 72, no. 11, pp. 1-6, 2005, doi: 10.1103/PhysRevB.72.115340.
- [19] A. N. Ikot and L. E. Akpabio, "Approximate Solution of the Schrödinger Equation with Rosen-Morse Potential Including the Centrifugal Term," *Appl. Phys. Res.*, vol. 2, no. 2, 2010, doi: 10.5539/apr.v2n2p202.
- [20] W. D. Angraini, Aminuyati, and Achmadi, "Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Hasil Belajar Mata Pelajaran Ekonomi Kelas XI IIS SMA," *J. Pendidik. dan Pembelajaran Khatulistiwa*, vol. 5, no. 8, pp. 1-11, 2016, [Online]. Available: <https://repository.unsri.ac.id/27031/>
- [21] M. Mustafa and S. Kais, "A Venn diagram for supersymmetric, exactly solvable, shape invariant, and Infeld-Hull factorizable potentials," vol. 2, no. 3, pp. 1-10, 2009, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0911.4206>